УДК 330.356

О. І. Ляшенко,
д. е. н., доцент, професор кафедри економічної кібернетики,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

МОДЕЛЬ ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ СОЛОУ-СВЕНА З ЕКЗОГЕННИМ КАПІТАЛОІНТЕНСИВНИМ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОГРЕСОМ

O. Liashenko,
Doctor of Economics, Docent, Professor of Economic Cybernetics Department,
Taras Shevchenko National University of Kyiv

SOLOW-SVEN MODEL OF ECONOMIC GROWTH WITH EXOGENOUS CAPITAL INTENSIVE TECHNOLOGICAL PROGRESS

У роботі розглянута модифікація моделі Солоу-Свена з капіталоінтенсивним технологічним прогресом, яка полягає у відмові від гіпотези про сталість норми збереження. Показано, що для неокласичної виробничої функції при спеціальному виборі змінної в часі норми збереження існує стаціонарна траєкторія ефективної капіталоозброєності. У цьому стані в довготривалій перспективі економіка підтримує себе виключно за рахунок зростаючого капіталоінтенсивного технологічного прогресу. Досліджена перехідна динаміка.

The paper presents a modification of Solow-Sven model of economic growth with capital intensive technological progress, that is to abandon the hypothesis of constancy preservation norms. It is shown that for neoclassical production function with special choice of the variable in time rate of savings there is a stationary capital-efficient trajectory. In this condition in the long run the economy maintains itself by growing of capital intensive technological progress. The transitional dynamics investigated.

Ключові слова: модель економічного зростання Солоу-Свена, екзогенний капіталоінтенсивний технологічний прогрес, неокласична виробнича функція, стаціонарний стан економічного зростання, перехідна динаміка.
Key words: Solow-Sven model of economic growth, exogenous technological progress, neoclassical production function, steady state of economic growth, transitional dynamics.

ВСТУП

Відправним пунктом сучасної теорії зростання стала класична стаття Рамсея [1] — робота, яка за твердженням авторів фундаментальної монографії [2] випередила свій час на кілька десятиліть. Наступні важливі результати були одержані Солоу [3] та Свеном [4]. Ключовим моментом моделі Солоу-Свена стала неокласична виробнича функція та стандартна гіпотеза про сталість норми збереження. На цьому і була створена гранично проста модель економіки загальної рівноваги.

Важливим результатом моделі Солоу-Свена стало те, що при відсутності тривалих технологічних покращень зростання випуску та споживання на душу населення з часом асимптотично зупиняється. Цей модельний дефект, зокрема, виправляють шляхом включення в модель екзогенного капіталоінтенсивного технологічного прогресу. При цьому в моделі це враховується введенням замість капітальних ресурсів $K(t)$ ефективного капіталу $\hat{K}(t) = e^{zt}K(t)$, де $z = const > 0$ — заданий темп капіталоінтенсивного технологічного прогресу.

У роботі [2] показано, що за умови існування стаціонарного стану моделі Солоу-Свена з капіталоінтенсивним технологічним прогресом випливає, що виробнича функція повинна мати лише вигляд функції Коба-Дугласа.

МЕТА СТАТТІ

Мета даної роботи — дослідити модифікацію моделі Солоу-Свена з капіталоінтенсивним технологічним прогресом,

що полягає у відмові від гіпотези про сталість норми збереження і шляхом вибору спеціальної залежності норми збереження від часу встановлення існування глобально стійкого стаціонарного стану моделі для будь-якої неокласичної виробничої функції.

Неокласична виробнича функція. Обсяги агрегованого випуску Y визначаються агрегованою виробничою функцією, яка характеризує технічно ефективні можливості виробництва залежно від обсягів капіталу K та витрат праці L: $Y = F(K, L)$ [5]. При цьому виробнича функція називається неокласичною, якщо вона має наступні властивості [2].

1. Стала ефективність із зростанням масштабу виробництва:

$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$ для всіх $\lambda > 0$.

2. Додатна та зменшуюча віддача ресурсів:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0;$$

3. Умови Інади [6]:

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty; \quad \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0.$$

4. Істотність:

$F(0, L) = F(K, 0) = 0.$

З перших трьох властивостей випливає, що випуск прямує до нескінченності при прямуванні будь-якого з ресурсів до нескінченності [2].

Однією з найпростіших і найбільш розповсюджених виробничих функцій, яка вважається зручною для описання реальних економік, є функція Коба-Дугласа $Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$,

де $A = const > 0$ — рівень технології, α — константа, $0 < \alpha < 1$.

У неокласичній виробничій функції можна перейти до змінних на душу населення:

$$Y = F(K, L) = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = Lf(k),$$

де $k = \frac{K}{L}$ — капітал на одного працівника, $y = \frac{Y}{L}$ — випуск на одного працівника, а функція $f(k) = F(k, 1)$. Таким чином, неокласична виробнича функція записується в інтенсивній формі $y = f(k)$.

Тоді

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = f'(k), \quad \frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) - kf'(k),$$

$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0.$$

У конкурентній економіці капітал і праця оплачуються своїми граничними продуктами, тобто граничний продукт капіталу дорівнює ціні оренди R, а граничний продукт праці дорівнює ставці заробітної плати ω [2]:

$R = f'(k), \quad \omega = f(k) - kf'(k).$

Модель Солоу-Свена з капіталоінтенсивним технологічним прогресом. Розглянемо виробничу функцію, що включає в себе екзогенний технологічний прогрес:

$$Y(t) = F\left(e^{zt} K(t), L(t)\right) \qquad (1),$$

де $z = const > 0$ — заданий темп капіталоінтенсивного технологічного прогресу.

Тоді зміни в основних фондах протягом часу описуються диференціальним рівнянням

$$\dot{K} = sF\left(e^{zt} K, L\right) - \delta K \qquad (2),$$

де s — норма збереження, $0 < s < 1$, а $\delta = const > 0$ — темп вибуття капіталу.

Вважаємо, що населення $L(t)$ зростає зі $\dot{L}/L = n \geq 0$ сталим темпом приросту $t = 0$. Пронормуємо кількість людей в момент до одиниці. Тоді населення (робоча сила) в момент часу t описується співвідношенням:

$$L(t) = e^{nt} \qquad (3).$$

Позначимо:

$$e^{zt} K = \hat{K} \qquad (4),$$

де $\hat{K}$ — ефективний обсяг капіталу.

Поділимо обидві частини співвідношення (1) на L і одержимо виробничу функцію в інтенсивній формі

$$\frac{\hat{Y}}{L} = F\left(\frac{\hat{K}}{L}, 1\right) = f\left(\frac{\hat{K}}{L}\right),$$

де всі величини

$$y = \frac{Y}{L}, \quad \hat{k} = \frac{\hat{K}}{L} \qquad (5)$$

виражені в розрахунку на одного працівника. Тоді обсяг випуску на одного працівника представиться у вигляді

$$y = f\left(\hat{k}\right) \qquad (6).$$

Наша подальша мета — перейти в рівнянні зростання основних фондів (2) до нової основної змінної $\hat{k}(t)$. Після ділення обох частин рівняння (2) на L одержимо співвідношення

$$\frac{\dot{K}}{L} = sf\left(\hat{k}\right) - \delta e^{-zt} \hat{k} \qquad (7),$$

Оскільки

$$\dot{\hat{k}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\hat{K}}{L}\right) = \frac{\dot{\hat{K}}}{L} - n\frac{\hat{K}}{L} = e^{zt}\frac{\dot{K}}{L} - (n - z)\hat{k},$$

то з урахуванням співвідношення (7) одержуємо шукане рівняння

$$\dot{\hat{k}} = se^{zt} f\left(\hat{k}\right) - (\delta + n - z)\hat{k} \qquad (8).$$

Щоб спростити одержане диференціальне рівняння зі змінним коефіцієнтом, зробимо заміну $\hat{k} = ue^{r}$, де r — невідома стала. Одержуємо таке рівняння

$$\dot{u} = se^{(z-r)t} f\left(ue^{rt}\right) - (\delta + n + r - z)u. \qquad (9).$$

Підберемо тепер сталу таким чином, щоб рівняння (9) набуло потрібного нам вигляду

$$\dot{u} = sf\left(u\right) - (\delta + n + r - z)u. \qquad (10).$$

Останнє можливо лише тоді, коли буде справджуватись таке функціональне рівняння

$$e^{(z-r)t} f\left(ue^{rt}\right) = f(u). \qquad (11).$$

Щоб член $f\left(ue^{rt}\right)$ компенсував член $e^{(z-r)t}$, функція $f(u)$ може бути лише степеневою і представляти виробничу функцію Коба-Дугласа

$$f(u) = Au^{\alpha}, \quad A > 0, \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (12).$$

Підставляючи (12) у функціональне рівняння (11), одержуємо

$$e^{(z-r)t} Au^{\alpha} e^{r\alpha t} = Au^{\alpha} \qquad (13).$$

Співвідношення (13) стає тотожністю при

$$r = \frac{z}{1-\alpha} \qquad (14).$$

При цьому основне диференціальне рівняння моделі Солоу-Свена приймає вигляд рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{u} = Asu^{\alpha} - \left(\delta + n + \frac{\alpha z}{1-\alpha}\right)u, \qquad (15),$$

де

$$u = \hat{k}e^{-rt} = e^{-\frac{\alpha z}{1-\alpha}t}\frac{K}{L} \qquad (16)$$

Таким чином, у доповнення до результатів роботи [2] ми іншим способом довели твердження, що лише у випадку виробничої функції Коба-Дугласа врахування екзогенного капіталоінтенсивного технологічного прогресу не виводить нас за рамки класичної моделі Солоу-Свена. Що стосується іншого виду неокласичних виробничих функцій, то такого немає.

Повернемося тепер до загального випадку основного рівняння моделі Солоу-Свена з капіталоінтенсивним технологічним прогресом (8).

Введемо до розгляду ефективну норму збереження $\hat{s}$ згідно з правилом

$$s = \hat{s}e^{-(\pi+z)t}, \quad \hat{s} = const. \qquad (17).$$

При цьому оскільки $\hat{s} = s(0)$, то $0 < \hat{s} < 1$ — відома стала.

Тоді замість (8) будемо досліджувати диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{\hat{k}} = \hat{s}f\left(\hat{k}\right) - (\delta + n - z)\hat{k}. \qquad (18).$$

Звернемо увагу: щоб отримати рівняння (17), довелося відмовитись від класичної гіпотези моделі Солоу-Свена про сталість у часі норми збереження. Саме в цьому і полягає пропонована модифікація моделі Солоу-Свена.

Член $\delta + n - z$ у правій частині рівняння (18) є ефективною нормою амортизації питомої величини $\hat{k} = \hat{K}/L$. Якби норма збереження $\hat{s}$ була нульовою, то $\hat{k}$ зменшувалась би частково в зв'язку з вибуттям $\hat{K}$ з темпом $\delta - z$, частково в зв'язку зі зростанням L з темпом n.

Перехідна динаміка. Аналіз поведінки отриманої моделі в часі проведемо в два етапи [2]. Спочатку розглянемо довгостроковий розвиток або стаціонарний стан, а потім опишемо короткострокову поведінку або перехідну динаміку. У моделі Солоу-Свена стаціонарний стан відповідає $\dot{\hat{k}} = 0$ в рівнянні (18), тобто перетин кривої $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)$ з прямою $(\delta + n - z)\hat{k}$. Відповідне значення $\hat{k}$ позначимо $\hat{k}^*$. Очевидно, $\hat{k}^*$ задовольняє умові

$$\hat{s}f\left(\hat{k}^*\right) = (\delta + n - z)\hat{k}^*, \quad \hat{k}^* > 0 \qquad (19).$$

Поділимо обидві частини рівняння (18) на $\hat{k}$. Одержимо в правій частині диференціального рівняння

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \hat{s}\frac{f\left(\hat{k}\right)}{\hat{k}} - (\delta + n - z) \qquad (20),$$

вираз у вигляді різниці двох членів, перший з яких є добутком $\hat{s}$ та середнього продукту ефективного капіталу $f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$, а другий є константою $(\delta + n - z)$. При цьому середній продукт капіталу $f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ змінюється з часом.

За визначенням стаціонарний стан $\hat{k}^*$ задовольняє умові (19). Виявляється, що перехідна динаміка величини $\hat{k}$ якісно та сама, як і динаміка $k = K/L$ у класичній моделі Солоу-Свена [2]. Зокрема, можна представити рисунок, як у класичному випадку, на якому по горизонтальній осі відкладаються $\hat{k}$, вниз нахилена крива $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$, а горизонтальна лінія знаходиться на рівні $\delta + n - z$ (рис. 1).

Перший вираз $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$, як і в [2], назвемо кривою збереження, а другий вираз $(\delta + n - z)$ — кривою амортизації. Похідна від $f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ по $\hat{k}$ дорівнює виразу $-\left[f\left(\hat{k}\right) - \hat{k}f'\left(\hat{k}\right)\right]/\hat{k}^2$. Тут вираз у квадратних дужках дорівнює граничному продукту праці, який завжди додатній. Отже, похідна від $f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ від'ємна, що і відображено на рисунку. Темп приросту ефективного капіталу на одного працівника $\hat{k} = \hat{K}/\hat{L}$ характеризується відстанню по вертикалі між кривою $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ та прямою $\delta + n - z$. Економіка знаходиться в стаціонарному стані, коли величина $\hat{k}$ стала. Тоді згідно (6) і величина теж стала.

Крива збереження має від'ємний нахил, що прямує до нескінченості при $\hat{k} \to 0$ та прямує до нуля при $\hat{k} \to \infty$. Крива амортизації представляє горизонтальну пряму на рівні $\delta + n - z$. Вертикальна відстань між кривою збереження і кривою амортизації дорівнює темпу приросту величини $\hat{k}$, а точка перетину їх відповідає стаціонарному стану. Оскільки $\delta + n - z > 0$ (саме це відповідає економічній реальності) та $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ знижується монотонно з нескінченості до нуля, то крива збереження і пряма амортизації перетинаються в єдиній точці. Отже, стаціонарне значення $\hat{k}^* > 0$ існує і єдине.

З рисунку видно, що зліва від стаціонарного стану крива $\hat{s}f\left(\hat{k}\right)/\hat{k}$ лежить вище прямої $\delta + n - z$. Тому темп приросту $\hat{k}$ залишається додатнім при зростанні $\hat{k}$ до $\hat{k}^*$. Якщо $\hat{k}$ зростає, то $\dot{\hat{k}}/\hat{k}$ зменшується і досягає нуля, як тільки $\hat{k}$

Рис. 1. Модель Солоу-Свена з технологічним прогресом

досягає $\hat{k}^*$. У цьому випадку економіка асимптотично прямує до стаціонарного стану, в якому $\hat{k}$ не змінюється. Аналогічні міркування справедливі і у випадку, коли економіка стартує вище стаціонарного стану $\hat{k}(0) > \hat{k}^*$. Тоді темп приросту величини $\hat{k}$ буде від'ємним, а $\hat{k}$ буде зменшуватись з часом. Коли $\hat{k}$ наближається до $\hat{k}^*$, темп приросту зростає і досягає нуля. Таким чином, система глобально стійка: для будь-якого початкового стану $\hat{k}(0) > 0$ економіка збігається до свого єдиного стаціонарного стану $\hat{k}^* > 0$.

У стаціонарному стані змінна $\hat{k}$ є сталою (темп приросту нульовий). Оскільки $y = f\left(\hat{k}\right)$, то $\dot{y} = f'\left(\hat{k}\right)\dot{\hat{k}}$ і в стаціонарному стані також змінна y є сталою (темп приросту нульовий). Оскільки

$$\frac{\dot{\hat{k}}}{\hat{k}} = \frac{\dot{k}}{k} + z = \frac{\dot{K}}{K} - (n - z), \quad \frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - n, \qquad (21),$$

то в стаціонарному стані $\left(\dot{\hat{k}} = 0\right)$ маємо $\dot{y} = 0$, але темпи приросту величин k, K та Y не є нульовими:

$$\frac{\dot{k}}{k} = -z, \quad \frac{\dot{K}}{K} = n - z, \quad \frac{\dot{Y}}{Y} = n \qquad (22).$$

ВИСНОВОК

У стаціонарному стані капіталоозброєність k падає з темпом z, капітал K зростає з темпом $n - z$, випуск Y зростає з темпом приросту населення n. При цьому оскільки ефективна норма збереження $\hat{s} = const$, то дійсна норма збереження $s(t) = \hat{s}e^{-zt}$ зменшується з часом і прямує до нуля при $t \to \infty$. Економічно це означає, що в довготривалій перспективі в стаціонарному стані, коли $\dot{\hat{k}} = 0$ та $\dot{y} = 0$, економіка не потребує значних збережень, а функціонує виключно за рахунок зростаючого екзогенного капіталоінтенсивного технологічного прогресу.

Література:

1. Ramsey Frank (1928). A Mathematical Theory of Saving // Economic Journal. — 38. — December. — 1928. — С. 543—559.

2. Барро Р.Дж. Экономический рост / Р.Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин; пер. с англ. — М.: БИНОМ. — Лаборатория знаний, 2010. — 824 с.

3. Solow Robert M. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economic. — 70. — February. — 1956. — С. 65—94.

4. Swan Trevor W. Economic Growth and Capital Accumulation // Economic Record. — 32. — November. — 1956. — С. 334—361.

5. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. За ред. О.І. Пономаренка. — К.: Інформтехніка, 1995. — 320 с.

6. Inada Ken-Ichi. On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization // Review of Economic Studies. — 30. — June. — 1963. — С. 110—127.

Стаття надійшла до редакції 03.07.2013 р.