

УДК 330.115

О. М. Ляшенко,

д. е. н., доцент, завідувач кафедри економічної кібернетики та інформатики,
Тернопільський національний економічний університет

В. М. Олейко,

к. е. н., доцент, доцент кафедри міжнародного менеджменту та маркетингу,
Тернопільський національний економічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ВНУТРІШНЬОЇ НОРМИ РЕНТАБЕЛЬНОСТІ ІННОВАЦІЙНОГО ПРОЕКТУ З НЕСТАЦІОНАРНИМИ ГРОШОВИМИ ПОТОКАМИ

У роботі побудована модель внутрішньої норми рентабельності інноваційного проекту у випадку, коли потік грошових надходжень має параболічний розподіл в одному з періодів реалізації інноваційного проекту.

The model of innovative project's internal rate of return is developed in the case when cash flow has the parabolic distributing in one of periods of innovative project.

Ключові слова: проект, внутрішня норма рентабельності, розподіл, дисперсія, мода, медіана, асиметрія.

ВСТУП

Реалізація інноваційних проектів завжди потребує фінансових ресурсів, при цьому підприємства інвестують кошти як в крупні інноваційні проекти, що потребують десятків і сотень мільйонів доларів, так і в невеликі проекти, пов'язані з організацією малого інноваційного бізнесу або модернізацією існуючого. Реалізувати крупні інноваційні проекти в Україні нині дуже важко через обмеженість коштів, а тому інвестори використовують різні схеми фінансування: синдиковане кредитування, послідовне залучення позик під заставу майна підприємства тощо. Серед крупних інноваційних проектів є проекти, реалізація яких відбувається поступово: поетапне введення нових виробничих потужностей, збільшення кількості основних засобів виробництва або об'єктів і т. д. Ці проекти на початковій стадії вимагають невеликих фінансових вкладень, а далі можуть фінансуватися за рахунок реінвестування отриманих прибутків. Графік реалізації проекту в такому випадку залежить від фінансових результатів діяльності підприємства і не може складатися лише на основі результатів маркетингового дослідження або порівняння проекту з аналогами, тобто виникає проблема його невизначеності.

Проте, традиційне моделювання фінансових потоків проектів базується на припущенні про те, що періоди і обсяги інвестиційних витрат, отримання операційних доходів і фінансування проекту — однакові за своїми характеристиками. Таким чином, зазвичай графік реалізації інноваційного проекту задається екзогенно, а метою моделі прогнозу руху грошових коштів є розраху-

нок показників ефективності, на основі яких ухвалюється рішення про доцільність інвестицій у інноваційний проект [1]. Треба вказати, що чим більше спрощень використовують при побудові фінансових моделей, тим більша похибка в розрахунках показників ефективності й в оцінці їх чутливості на зміну значень вхідних даних.

Сучасні ринкові умови, наявність економічних, соціальних, політичних й інших ризиків посилюють вимоги до точності оцінки економічної ефективності інноваційних проектів. Така точність ґрунтується на двох складових — достовірності прогнозу вихідних даних та комплексності фінансової моделі проекту.

У деяких інвестиційних компаніях, що займаються оцінкою інноваційних проектів, є практичні напрацювання з даної проблематики, проте узагальненого інтегрованого теоретичного дослідження в цьому науковому напрямі ще не проводилося. При побудові фінансових моделей аналітики застосовуються різні програмні продукти: "Альт-інвест", "COMFAR", "Project Expert", "Інвестиційний аналітик" та ін., де основою всіх розрахунків є моделювання грошового потоку проекту. Тому на виході більшість пакетів формують розрахункові таблиці про підприємство, що реалізовує проект, у вигляді прогнозних звітів про рух грошових коштів. Таким чином, вони є типовими і не дають змогу враховувати складні залежності між параметрами проекту та специфічні характеристики нестационарних грошових потоків.

Різним аспектам вказаної проблематики приділено увагу в роботах вітчизняних та зарубіжних вчених. Зокрема, проблемам аналізу інвестиційних проектів та ма-

тематичного моделювання цих процесів присвячені праці: П. Віленського, В. Вітлінського, В. Ковальова, В. Лівшица, І. Ліпсиця, П. Массе, С. Айвазяна, Л. Мозеса. Проблематику дослідження грошових потоків (cash flows — CF) досліджували: І. Балабанова, І. Бланк, Г. Джоунс, Є. Четиркін, У. Шарп та ін.

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ

Застосування економіко-математичних методів підвищує ефективність економічного аналізу інноваційних проектів через розширення набору чинників, обґрунтування раціональних управлінських рішень вибору оптимального варіанта використання наявних ресурсів, виявлення і мобілізації резервів підвищення ефективності виробництва. У сучасних умовах, коли навіть незначні помилки можуть привести до величезних втрат, що, в першу чергу, характерне для інноваційної діяльності й для проектів, що базуються на реінвестуванні прибутку, моделювання поведінки потоків ресурсів є надзвичайно актуальним. У зв'язку з цим виникає необхідність в створенні інструментів, що дають змогу визначати оптимальні графіки реалізації інноваційного проекту на основі адекватних оцінок специфічних характеристик грошових потоків інноваційних проектів та пов'язаних з ними ризиків.

РЕЗУЛЬТАТИ

Аналіз літературних джерел [1—9] показує, що для оцінки ефективності реалізації тих чи інших проектів, як правило, використовують моделі простих інвестиційних проектів, де надходження коштів має розподіл — однаковий для всіх етапів реалізації проектів.

Але реальні проекти характерні різними видами розподілу грошових надходжень, а саме — послідовність грошових надходжень по проекту в реальних умовах складається з окремих часових проміжків з різними, специфічними розподілами грошових надходжень. У більшості випадків інтенсивність грошового потоку інноваційного проекту змінюється з часом (t), зокрема це стосується інноваційних проектів щодо виробництва і реалізації нової продукції. Такий грошовий потік називають нестационарним [10], а проект вважають складним. Розглянемо внутрішню норму рентабельності такого проекту. Дослідимо випадок параболическої функції розподілу $F(x)$ грошового потоку, а саме — випадкової величини CF_n (від англ. cash flows — CF, де індекс n — номер періоду проекту), виду:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}, & a < x < b; \\ 1, & x \geq b; \\ 0, & x \leq a. \end{cases} \quad (1).$$

Функцію щільності цього розподілу знаходимо диференціюванням функції (1):

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{1}{2\sqrt{(b-a)(x-a)}}, & a < x < b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases} \quad (2).$$

Моделюємо ситуацію, коли такий розподіл зустрічається у 2-му періоді реалізації інвестиційного проекту. На основі формули (2) обчислимо математичне сподівання величини грошових надходжень для 2-го періоду — A_2 :

$$M(CF_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \\ M(CF_2) = \int_a^b \frac{1}{2}((b-a)(x-a))^{-1/2} x dx. \quad (3).$$

Зробивши у інтегралі (3) заміну $x - a = t$ отримаємо:

$$= \frac{1}{3} \frac{(b-a)^{3/2}}{\sqrt{b-a}} + \frac{2a\sqrt{b-a}}{2\sqrt{b-a}} = \frac{b-a}{3} + a. \\ \text{Отже,} \quad (4).$$

За допомогою формули (4) можна знайти оцінку внутрішньої норми рентабельності на основі її математичного сподівання:

$$IRR_M = \frac{\sqrt{CF_1^2 - \frac{4}{3}CF_0(2a+b) + CF_1}}{-2CF_0} - 1 \quad (5).$$

Щоб дослідити, наскільки точно ця оцінка визначає характеристики випадкової внутрішньої норми рентабельності, знайдемо функцію розподілу випадкової величини IRR:

$$F_I(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{-CF_0(x+1)^2 - CF_1(x+1) - a}{b-a}}, & \alpha < x < \beta; \\ 1, & x \geq \beta; \\ 0, & x \leq \alpha. \end{cases} \quad (6),$$

де

$$\alpha = \frac{\sqrt{CF_1^2 - 4CF_0a} + CF_1}{-2CF_0} - 1 > 0 \quad (7),$$

$$\beta = \frac{\sqrt{CF_1^2 - 4CF_0b} + CF_1}{-2CF_0} - 1 > 0 \quad (8).$$

На основі формули (6) обчислимо медіану внутрішньої норми рентабельності, тобто таке значення, яке розділяє діапазон $[\alpha; \beta]$ на два рівномірні:

$$\left(\frac{-CF_0(x+1)^2 - CF_1(x+1) - a}{b-a} \right)^{1/2} = \frac{1}{2}, \text{ або} \\ -CF_0(x+1)^2 - CF_1(x+1) - a = \frac{1}{4}(b-a) \quad (9).$$

Звідси $CF_0(x+1)^2 + CF_1(x+1) + \frac{1}{4}b + \frac{3}{4}a = 0$ і шуканий корінь цього рівняння:

$$Me(IRR) = \frac{(CF_1^2 - CF_0(b+3a))^{1/2} + CF_1}{-2CF_0} - 1 \quad (10).$$

Оскільки $\frac{4}{3}b + \frac{8}{3}a > b + 3a$, то $IRR_M > Me(IRR)$, тобто оцінка IRR_M більша, ніж медіана внутрішньої норми рентабельності.

Функція щільності розподілу внутрішньої норми рентабельності виражається такою формулою:

$$+1) - CF_1), \quad \alpha < x < \beta \quad (11),$$

що дає змогу обчислити математичне сподівання випадкової внутрішньої норми рентабельності:

$$+1-a)^{-1/2} x(-2CF_0(x+1)-CF_1)dx \quad (12).$$

Щоб обчислити інтеграл (12) за частинами, введемо позначення:

$$dv = \frac{1}{2} \left((b-a)(-CF_0(x+1)^2 - CF_1(x+1) - a) \right)^{-1/2} (-2CF_0(x+1) - CF_1) d(x+1);$$

Тоді

$$M(IRR) = x \left(\frac{(-CF_0(x+1)^2 - CF_1(x+1) - a)}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \Bigg|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \left((-CF_0(x+1)^2 - CF_1(x+1) - a) \right)^{\frac{1}{2}} (b-a)^{-\frac{1}{2}} dx ;$$

$$- \alpha \left(\frac{(-CF_0(\alpha+1)^2 - CF_1(\alpha+1) - a)}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} - m_1 - m_2 - m_3 . \tag{13}.$$

$$v = \left(\frac{(\Delta \varphi)^2}{(CF_0(x+1)CF_1(x+1))^{1/2}} \right) \cdot \left(\frac{(CF_0 b - 4\alpha_0 b)^{1/2} + CF_1}{-2CF_1} - 1 \right).$$

$$m_2 = \alpha \left(\frac{(-CF_0(\alpha+1)^2 - CF_1(\alpha+1) - a)}{b-a} \right)^{1/2} = \alpha \left(\frac{a-a}{b-a} \right)^{1/2} = 0;$$

$$\begin{aligned} m_3 &= (b-a)^{-\frac{1}{2}} \int_{a+1}^{\beta+1} \left((-CF_0 x^2 - CF_1 x - a) \right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{-CF_0}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{a+1}^{\beta+1} \left(x^2 + \frac{CF_1}{CF_0} x - \frac{a}{CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \left(\frac{-CF_0}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{a+1}^{\beta+1} \left(\left(x + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Останній інтеграл можна обчислити в квадратах

$$\begin{aligned}
m_3 = & \left(\frac{CF_0}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{CF_1}{2CF_0} \right) \left(x^2 + \frac{CF_1}{CF_0} x + \frac{a}{CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right]_{\alpha+1}^{\beta+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \times \\
& \times \left(\ln \left| x + \frac{CF_1}{2CF_0} + \left(x^2 + \frac{CF_1}{CF_0} x + \frac{a}{CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \right) \Bigg|_{\alpha+1}^{\beta+1} = \left(\frac{CF_0}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} (\beta+1 + \frac{CF_1}{2CF_0}) \left((\beta+1)^2 + \right. \right. \\
& + \frac{CF_1}{2CF_0} \left. \left((\beta+1)^2 + \frac{CF_1}{CF_0} (\beta+1) + \frac{a}{CF_0} \right) \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\alpha+1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right) \left((\alpha+1)^2 + \frac{CF_1}{CF_0} (\alpha+1) + \frac{a}{CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \times \left(\ln \left(\beta+1 + \frac{CF_1}{2CF_0} + \left((\beta+1)^2 + \frac{CF_1}{CF_0} (\beta+1) + \frac{a}{CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$-\ln \left(\alpha + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} + \left((\alpha + 1)^2 + \frac{CF_1}{CF_0}(\alpha + 1) + \frac{a}{CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|.$$

З урахуванням рівностей $(\beta+1)^2 + \frac{CF_1}{2CF_0}(\beta+1) = -\frac{b}{CF_0}$ та

$(\alpha+1)^2 + \frac{CF_1}{2CF_0}(\alpha+1) = -\frac{a}{CF_0}$ вираз m_3 можна записати в простішій формі:

$$m_3 = \left(-\frac{CF_0}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{\frac{1}{2}}}{-4CF_0} \left(\frac{b-a}{-CF_0}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} + \left(\frac{b-a}{-CF_0}\right)^{\frac{1}{2}} \right) - \ln \frac{(CF_1^2 - 4CF_0a)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} \right) \right]$$

Підставивши отримані значення m_p, m_z, m_3 у формулу (13), отримаємо явну формулу для визначення математичного сподівання внутрішньої норми рентабельності проекту:

$$M(IRR) = \frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} + CF_1 - 1 - \frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{\frac{1}{2}}}{-4CF_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) \times \\ \times \left[\ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} + \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right) - \ln \frac{(CF_1^2 - 4CF_0a)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} \right] \left(\frac{-CF_0}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Маючи математичне сподівання, обчислимо дисперсію внутрішньої норми рентабельності інноваційного проекту:

$$D(IRR) = \int_a^b \frac{1}{2} \left((b-a)(-CF_0(x+1)^2 - CF_1(x+1) - a) \right)^{-\frac{1}{2}} (x - \sqrt{-2CF_0(x+1) - CF_1}) d(x+1); \quad (15)$$

або

$$(16).$$

Щоб обчислити визначений інтеграл (16), знайдемо спочатку невизначений інтеграл:

$$I = \int \left(-CF_0 x^2 - CF_1 x - a \right)^{1/2} (x^2 - 2x(1 + M(IRR)) + (1 + M(IRR))^2) (-2CF_0 x - CF_1) dx \quad (17).$$

Зробимо заміну

$$(18).$$

Тоді

$$I = \int \left(-CF_0 \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(t - \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^2 - 2 \left(t - \frac{CF_1}{2CF_0} \right) (1 + M(IRR)) + (1 + M(IRR))^2 \right) (-2CF_0 t) dt - 2 \left(t - \frac{CF_1}{2CF_0} \right) (1 + M(IRR)) + (1 + M(IRR))^2 t \Big|_t \quad (19).$$

Інтеграл (19) можна записати у вигляді суми чотирьох інтегралів відповідно до показників степеня доданків чисельника підінтегральної функції:

$$(20).$$

де

$$I_3 = \int \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-1/2} t^3 dt \quad (21);$$

$$I_2 = -\frac{CF_1}{CF_0} \int \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt -$$

$$-2(1+M(IRR)) \int \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} t^2 dt \quad (22);$$

(23);

$$I_0 = \left(\frac{CF_1}{CF_0} (1+M(IRR)) + (1+M(IRR))^2 \right) \cdot \int \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} t dt \quad (24).$$

Інтеграл (24) обчислюється за формулою:

$$I_0 = \left(\frac{CF_1}{CF_0} (1+M(IRR)) + (1+M(IRR))^2 \right) \cdot \left(\left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + C_0 \right) \quad (25).$$

Для інтеграла (23) також можна застосувати табличну формулу:

$$I_1 = \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \left(\left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + C_1 \right) \quad (26).$$

Обчислимо тепер інтеграл (22), розбивши його на два доданки:

$$I_2 = \int \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} + \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) dt \left(-\frac{CF_1}{CF_0} - 2(1+M(IRR)) \right) =$$

$$= \left(-\frac{CF_1}{CF_0} - 2(1+M(IRR)) \right) \times$$

$$\left(-\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(-\frac{CF_1}{CF_0} - 2(1+M(IRR)) \right) \left(\frac{1}{2} t \times \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) \cdot \ln \left| t + \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \right) + C_2;$$

$$I_2 = \left(-\frac{CF_1}{CF_0} - 2(1+M(IRR)) \right) \left(t \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) \cdot \ln \left| t + \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \right) + C_2 \quad (27).$$

І, нарешті, інтеграл (21) обчислюється за допомогою перетворень:

де $z = t^2$.З урахуванням цієї заміни інтеграл I_3 можна знайти безпосередньо:

$$= \frac{1}{2} \int \left(z + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dz + \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) \times \int \frac{1}{2} \left(z + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dz =$$

$$= \frac{1}{3} \left(z + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) \cdot \left(z + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + C_3 =$$

Після зведення подібних доданків отримуємо:

$$I_3 = \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{3} t^2 + \frac{a}{CF_0} + \frac{CF_1^2}{6CF_0^2} - \frac{2a}{3CF_0} \right) + C_3 \quad (28).$$

Підставивши тепер у формулу (20) вирази (25)–(28), отримаємо в аналітичній формі інтеграл І:

$$I = 2\sqrt{-CF_0} \left[\left(\frac{CF_1}{CF_0} (1+M(IRR)) + (1+M(IRR))^2 \right) \cdot \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. + \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) \cdot \ln \left| t + \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \right] \times$$

$$\times \left(\frac{1}{3} t^2 + \frac{CF_1^2}{6CF_0^2} - \frac{2a}{3CF_0} \right) + C,$$

$$(29).$$

де C_0, C_1, C_2, C_3, C — довільні сталі.

На основі формул (16), (29), враховуючи заміну (18), обчислимо дисперсію, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

$$D(IRR) = \left(-\frac{CF_0}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{CF_1}{CF_0} (1+M(IRR)) + (1+M(IRR))^2 \right) \cdot \frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{CF_1}{2CF_0} + 2(1+M(IRR)) \right) \left(\frac{(A^2 - 4Ab)^{\frac{1}{2}}}{-4Ab} \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{CF_0} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \cdot \ln \left| \frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} + \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} \right| - \left| \frac{(CF_1^2 - 4CF_0a)^{\frac{1}{2}}}{-2CF_0} \right| \right] +$$

$$\left[\left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{CF_1^2 - 4CF_0b}{12CF_0} - \frac{2a}{3CF_0} + \frac{CF_1^2}{6CF_0^2} \right) \right] \quad (30).$$

Поруч з цим абсолютним показником ризику особи, що приймає рішення щодо інвестиційного проекту, доцільно мати в розпорядженні і відносний показник ризику, яким може бути коефіцієнт варіації:

$$k(IRR) = \sigma(IRR) / M(IRR) = \sqrt{D / M} \quad (31).$$

Іншою важливою характеристикою ризику оцінки внутрішньої норми рентабельності є асиметрія. Для того, щоб її обчислити, знайдемо спочатку центральний момент третього порядку:

$$\mu_3 = \int_a^b \frac{1}{2} (x - M(IRR))^3 (-2CF_0(x+1) - CF_1) ((b-a)(-CF_0(x+1)^2 -$$

$$- CF_1(x+1) - a))^{-\frac{1}{2}} dx.$$

або

(32).

Для зручності обчислень інтегралу (34) також доцільно застосувати заміну (18):

$$\mu_3 = \frac{1}{2\sqrt{b-a}} \int_{\frac{a+1}{2CF_0}}^{\frac{\beta+1}{2CF_0}} \left(t - 1 - \frac{CF_1}{2CF_0} - M(IRR) \right)^3 (-2CF_0) \left(-CF_0 \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \left(-\frac{CF_0}{b-a} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{a+1}{2CF_0}}^{\frac{\beta+1}{2CF_0}} \left(t^4 - 3t^3 \times \left(1 + \frac{CF_1}{2CF_0} + M(IRR) \right) + 3t^2 \left(1 + \frac{CF_1}{2CF_0} + M(IRR) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(1 + \frac{CF_1}{2CF_0} + M(IRR) \right)^3 \right) t \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} dt. \quad (33)$$

Перетворимо підінтегральну функцію до виду

зручного для безпосереднього інтегрування і застосування формули Ньютона-Лейбніца [4], отримаємо:

$$\begin{aligned} \mu_3 = & \sqrt{-\frac{CF_0}{b-a} \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right)} \cdot \left(\ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{1/2}}{-2CF_0} + \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} \right) - \right. \\ & \left. - \ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0a)^{1/2}}{-2CF_0} \right) \right) + \\ & -2 \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \times \\ & \cdot \left(\ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{1/2}}{-2CF_0} + \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} \right) - \ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0a)^{1/2}}{-2CF_0} \right) \right) - \\ & \cdot \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{b}{3CF_0} - \frac{2a}{3CF_0} \right) + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \cdot \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{b}{3CF_0} - \frac{2a}{3CF_0} \right) + \end{aligned} \quad (34),$$

де

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+1}{2CF_0}}^{\frac{CF_1}{2CF_0}} \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{1/2} dt = & \frac{1}{2} \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{1/2}}{-2CF_0} + \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{a}{CF_0} \right) \times \left(\ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0b)^{1/2}}{-2CF_0} + \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \ln \left(\frac{(CF_1^2 - 4CF_0a)^{1/2}}{-2CF_0} \right) \right) - \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{b}{3CF_0} - \frac{2a}{3CF_0} \right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \cdot \left(\frac{b-a}{-CF_0} \right)^{1/2} \left(\frac{CF_1^2}{4CF_0^2} - \frac{b}{3CF_0} - \frac{2a}{3CF_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (35),$$

Для цього позначимо:

$$1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) t^{-2} = z^2; \quad \left(1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) t^{-2} \right)^{1/2} = z;$$

$$2tdt = - \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \frac{2zdz}{(1-z^2)^2}.$$

Отже,

$$- \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \left(\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} + \int \frac{dz}{(1-z^2)^3} \right).$$

Якщо зробити заміну $z = \frac{1}{t}$, тоді $dz = -\frac{1}{t^2} dt$, тоді

$$\int \frac{dz}{(z^2-1)^2} = \int \frac{dt}{sh^3 t}, \text{ то ці інтеграли зводяться до інтегралів від гіперболічних функцій.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{sh^3 t} = & \int \frac{dz}{(z^2-1)^2} = \frac{z}{(z^2-1)^2} - \int z(-2)(z^2-1)^{-3} 2zdz = \frac{z}{(z^2-1)^2} + \\ & + 4 \int \frac{z^2 dz}{(z^2-1)^3} = \frac{z}{(z^2-1)^2} + 4 \int \frac{dz}{(z^2-1)^2} + 4 \int \frac{dz}{(z^2-1)^3}. \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(z^2-1)^2} = & \int \left(\frac{CF_1'}{z-1} + \frac{CF_2'}{z+1} + \frac{CF_3'}{(z-1)^2} + \frac{CF_4'}{(z+1)^2} \right) dz; \\ CF_1'(z-1)(z+1)^2 + CF_2'(z+1)(z-1)^2 + CF_3'(z+1)^2 + CF_4'(z-1)^2 = & 1. \end{aligned}$$

$$\text{При } z=1; \quad 4CF_3'=1; \quad CF_3'=\frac{1}{4}.$$

$$\text{При } z=-1; \quad 4CF_4'=1; \quad CF_4'=\frac{1}{4}.$$

$$\text{При } z=0; \quad -CF_1'+CF_2'+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1; \quad CF_2'-CF_1'=\frac{1}{2}.$$

$$\text{При } z=2; \quad 9CF_1'+3CF_2'+\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=1;$$

$$\begin{cases} CF_2'-CF_1'=\frac{1}{2}; \\ 3CF_1'+CF_2'=-\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$2CF_2'+2CF_1'=0; \quad CF_1'+CF_2'=0; \Rightarrow CF_2'=-CF_1'; \quad -2CF_1'=\frac{1}{2};$$

$$CF_1'=-\frac{1}{4}; \quad CF_2'=\frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} = & -\frac{1}{4} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) t^2 \right| - \frac{1}{4} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) t^2 \right| + \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) t^2 \right)^{-1} - \\ & - \frac{1}{4} \left(1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) t^2 \right)^{-1} + C_1. \end{aligned}$$

Методом невизначених коефіцієнтів можна обчислити також первісну (36):

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(z^2-1)^3} = & \int \frac{B_1 dz}{z-1} + B_2 \int \frac{dz}{(z-1)^2} + B_3 \int \frac{dz}{(z-1)^3} + B_4 \int \frac{dz}{z+1} + \\ & + B_5 \int \frac{dz}{(z+1)^2} + B_6 \int \frac{dz}{(z+1)^3}; \\ B_1(z-1)^2(z-1)^3 + B_2(z-1)(z+1)^3 + B_3(z+1)^3 + B_4(z-1)^3(z+1)^2 + \\ & + B_5(z+1)(z-1)^3 + B_6(z-1)^3 = 1 \end{aligned} \quad (37).$$

Якщо

$$\text{Якщо } z=-1; \quad -8B_6=1; \Rightarrow B_6=-\frac{1}{8}.$$

$$\text{Якщо } z=0; \quad B_1-B_2+\frac{1}{8}-B_4-B_5+\frac{1}{8}=1, \text{ тобто}$$

$$B_1-B_2-B_4-B_5=\frac{3}{4}. \quad (38).$$

При $z=2$ отримаємо рівняння:

$$9(B_1+B_2)+3B_4+B_5=-\frac{3}{4} \quad (39).$$

При $z=-2$, маємо:

$$-9B_1+3B_2-\frac{1}{8}-27B_4+27B_5=1 \Rightarrow -3B_1+B_2-9B_4+9B_5=-\frac{3}{4} \quad (40).$$

Ще одне рівняння, якого не вистачає для обчислення коефіцієнтів B_1, B_2, B_3, B_4 , можна отримати з рівності (37), якщо прирівняти до нуля коефіцієнт біля 5-го степеня z в лівій частині цієї рівності:

$$B_1+B_4=0 \quad (41).$$

Рівняння (38)–(41) утворюють лінійну систему:

$$\begin{cases} B_1 - B_2 - B_4 - B_5 = \frac{3}{4}; \\ 9B_1 + 9B_2 + 3B_4 + B_5 = -\frac{3}{4}; \\ -3B_1 + B_2 - 9B_4 + 9B_5 = -\frac{3}{4}; \\ B_1 + B_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 - B_2 - B_4 - B_5 = \frac{3}{4}; \\ 10B_1 + 8B_2 + 2B_4 = 0; \\ -2B_1 - 10B_4 + 8B_5 = 0; \\ B_4 = -B_1. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2B_1 - B_2 - B_5 = \frac{3}{4}; \\ B_1 + B_2 = 0; \\ B_1 + B_5 = 0; \\ B_4 = -B_1. \end{cases}$$

Отже, $B_2 = -B_1$; $B_5 = -B_1$; $4B_1 = \frac{3}{4}$; $B_1 = \frac{3}{16}$; $B_2 = -\frac{3}{16}$;

$$B_4 = -\frac{3}{16}; \quad B_5 = -\frac{3}{16}.$$

Використовуючи обчислені коефіцієнти, можемо знайти інтеграл:

Таким чином, для останнього доданка у формулі (34) отримуємо явну формулу:

$$\begin{aligned} \int t^2 \left(t^2 + \frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt = & - \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right)^2 \left(\frac{1}{4} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\alpha + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| - \\ & + \frac{1}{4} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} + \left| - \frac{1}{4} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\alpha + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| - \frac{1}{4} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-1} + \\ & - \frac{1}{4} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-1} - \frac{1}{4} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} + 1 \right)^{-1} + \\ & + \frac{3}{16} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right| - \frac{3}{16} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \right| \times \\ & \times \left(\alpha + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \left| - 1 + \frac{3}{16} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-1} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{16} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-1} - \frac{1}{16} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-2} + \\ & \left. - \frac{3}{16} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} + 1 \right| + \frac{3}{16} \ln \left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \right| \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\alpha + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \left| - 1 + \frac{3}{16} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\beta + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-1} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{16} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \left(\alpha + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-1} + \frac{1}{16} \left(\left| 1 + \left(\frac{a}{CF_0} - \frac{CF_1^2}{4CF_0^2} \right) \right| \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\beta + 1 + \frac{CF_1}{2CF_0} \right)^{-2} \right|^{\frac{1}{2}} - 1 \right)^{-2} + 1 \right| - \end{aligned} \quad (42).$$

Отже, маючи центральний момент третього порядку за формулою (34) з урахуванням формул (35) та (42), а також дисперсію (30), можна обчислити асиметрію внутрішньої норми рентабельності інвестиційного проекту:

$$As(IRR) = \mu_3 / (D(IRR))^{3/2} \quad (43).$$

ВИСНОВКИ

Аналітичне дослідження внутрішньої норми рентабельності інноваційного проекту у випадку грошових надходжень за законом параболічної функції у другому періоді проекту дало змогу знайти явний вираз для обчислення математичного сподівання внутрішньої норми рентабельності інноваційного проекту, медіану, дисперсію та асиметрію внутрішньої норми рентабельності. На основі запропонованої моделі можна розробити алгоритм знаходження внутрішньої норми рентабельності для інноваційного проекту з нестаціонарними грошовими потоками, коли у одному з періодів потік грошових надходжень має параболічний закон розподілу.

Література:

1. Ковалев В. Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности. — 2-е изд. перераб. и доп. / В. В. Ковалев. — М.: Финансы и статистика, 1997. — 512 с.
2. Вітлінський В.В. Аналіз, оцінка і моделювання економічного ризику / В.В. Вітлінський. — К.: Деміур, 1996. — 212 с.
3. Мирзоахмедов Ф. Математическая модель и методы управления производством с учетом случайных факторов. / Ф.М. Мирзоахмедов — К.: Наукова думка, 1991. — 224 с.
4. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И.М. Виноградов. — М.: Советская энциклопедия, 1979—1984. — Т 5. — 2952 с.
5. Четыркин Е. Методы финансовых и коммерческих расчетов. / Е.М. Четыркин. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: "Дело Лтд", 1995. — 320 с.
6. Шарп У. Инвестиции / Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. / Пер. с англ. — М.: ИНФРА—М, 1997. — 1024 с.
7. Пестель Э. За пределами роста / Пестель Э. — М.: Прогресс, 1988. — 238 с.
8. Ковальчук К.Ф. Методи інтелектуальної підтримки прийняття економічних рішень: автореф. дис. д-ра екон. наук. — К.: НАН України ІК ім. В.М. Глушкова, 1996. — 32 с.
9. Теория прогнозирования и принятия решений / Под. ред. С.А. Саркисяна. — М.: Высшая школа, 1977. — 353 с.
10. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Гмурман. — М.: Высшая школа, 1977. — 480 с.

Стаття надійшла до редакції 07.07.2010 р.